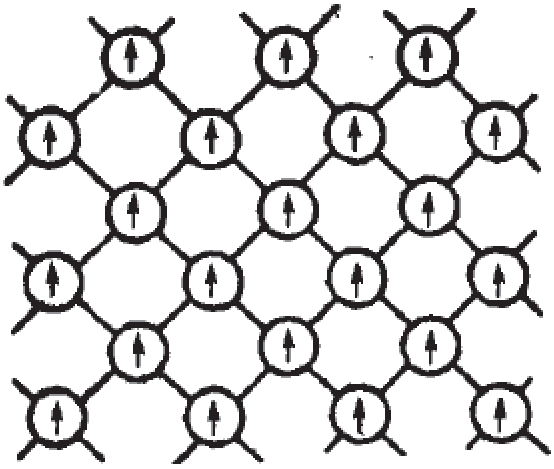
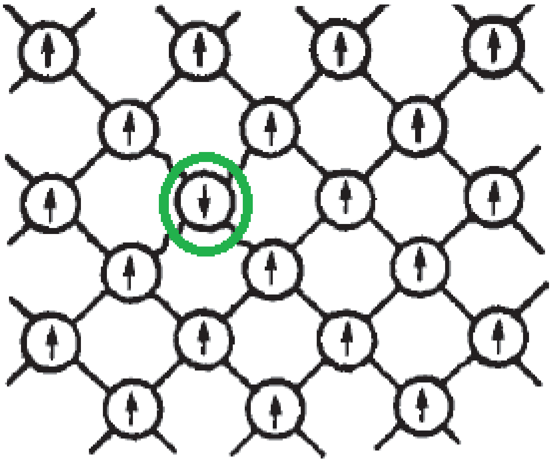
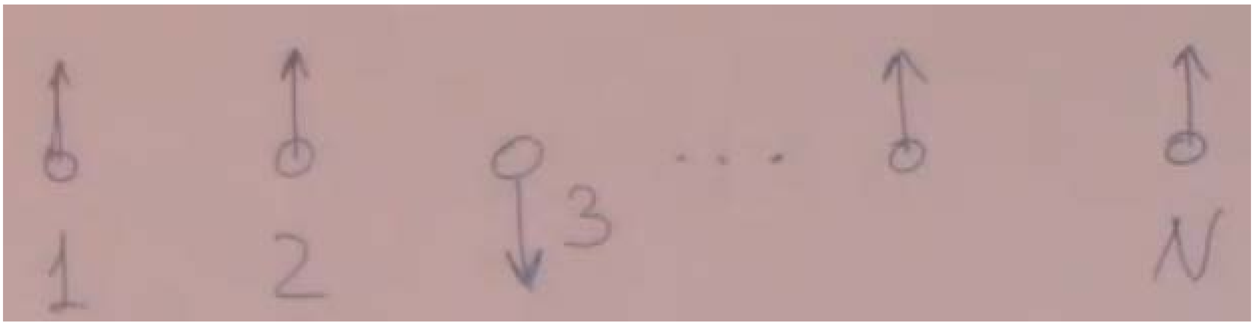
Зачем нужна модель Изинга?
Изначально она была создана для описания ферромагнетиков, но потом оказалось что у неё 100500 других приложений вроде описания нейронных сетей (как в человеке, так и компуктерных) и т.д. и т.п. **Этой темы НЕТ ни на коллоквиуме, ни на экзамене.** Я уже говорил, что туда всякое говно вынесли, а самые вкусные темы вроде этой оставили за бортом. Но для желающих узнать больше – милости простим.

У нас совокупность электронов, у каждого из которых может быть спин как по полю, так и против поля:

Справа выделенный электрон решил пройти против системы ☺

Для простоты сначала рассмотрим сначала одномерный случай из N электронов:



(фотка отсюда https://www.youtube.com/watch?v=wkfZk_GJyWE)

Сначала рассмотрим случай, когда внешнего поля B нет (буква H у нас будет занята под гамильтониан, так что внешнее магнитное поле будем обозначать как B).
Гамильтониан тогда равен

$$H = -J \sum_{k=1}^{N-1} \sigma_k \sigma_{k+1} = -J(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \cdots + \sigma_{N-1}\sigma_N)$$

Он складывается из-за взаимодействия соседних электронов. J – константа взаимодействия (её везде обозначают разной буквой).
То, что мы ограничились лишь взаимодействием соседних электронов, оказывается разумно, т.к. магнитное поле быстро спадает.

Если J>0, то минимальное значение H_0, когда все электроны повёрнуты в одну сторону: так

↑ ↑ ↑ ↑

1 2 3 ... N

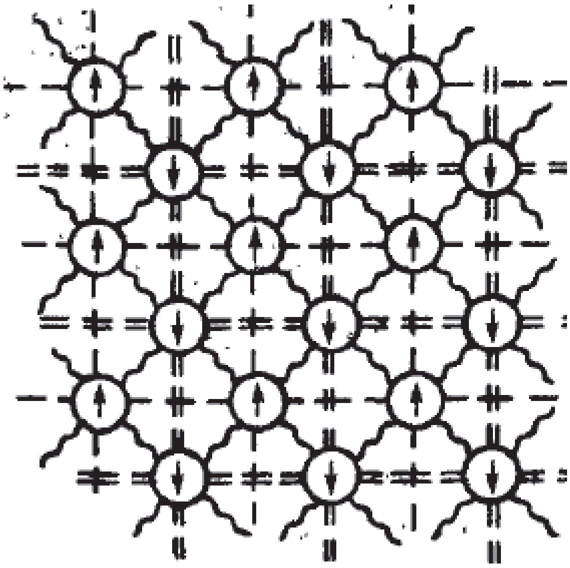
или так:

1 2 3 ... N

↓ ↓ ↓ ↓

Что как раз соответствует духу ферромагнетиков с их доменами, где все электроны «смотрят» в одну сторону.

А если J<0, то перед нами антиферромагнетик, когда электронам выгодно «лежать валетом»:



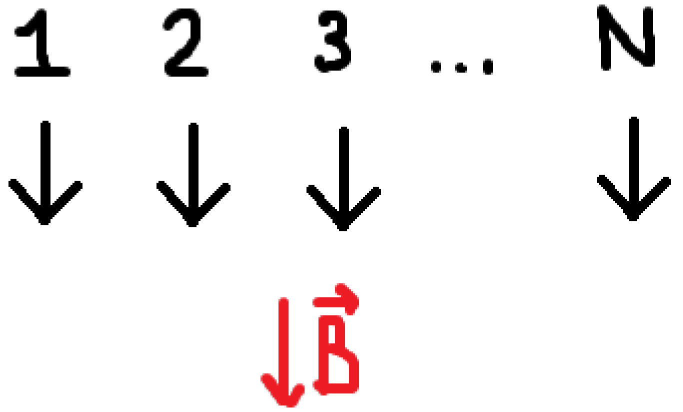
Но это всё при θ=0! А что, если θ>0?
Если увеличивать температуру, у нас появятся электроны, пошедшие против системы. Постепенно таких будет становиться всё больше, и в конечном итоге $< N_\uparrow > = < N_\downarrow > = \frac{N}{2}$. У антиферромагнетиков будет примерно то же самое, просто там также будет хаос, а не строгое чередование вверх-вниз-вверх-вниз.

Теперь добавляем магнитное поле B.

В гамильтониан добавляется слагаемое с магнитным полем:

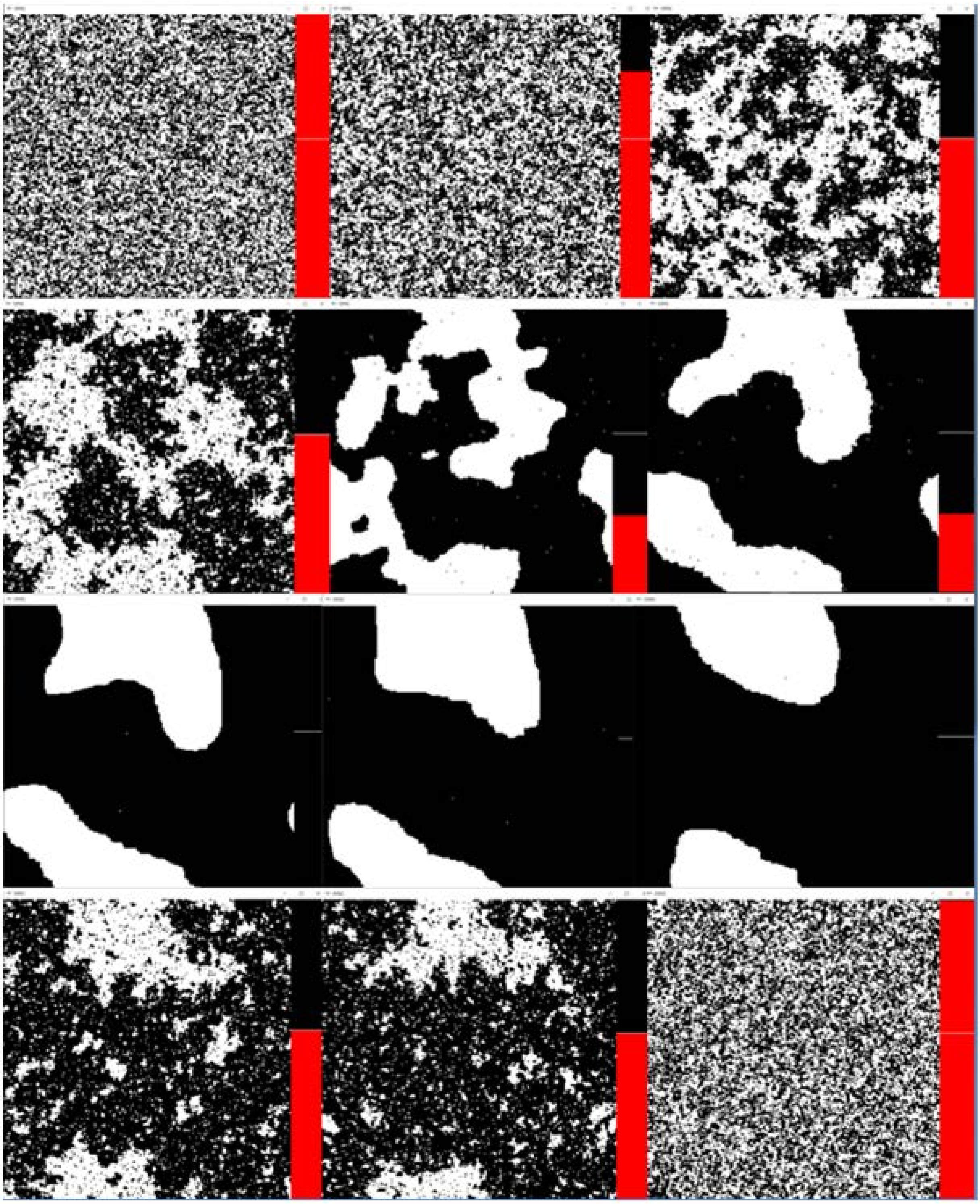
$$H = -J\sum_{k=1}^{N-1}\sigma_k\sigma_{k+1} - \text{магнетон Бора} * \sum_{k=1}^{N} B\sigma_k$$

Т.е. теперь каждый электрон взаимодействует не только с соседями, но и сам по себе с внешним магнитным полем.
Основное состояние (т.е. состояние при $\theta=0$) теперь будет одно, а не два, а именно по полю (для ферромагнетика):



При $\theta \to 0$ вновь будет хаос. А что будет посреди между упорядочиванием и хаосом? Оказывается, что в 1D не будет ничего интересного – постепенно с ростом температуры часть электронов будут перестраиваться. Именно такой результат получил сам Изинг в 1920 году.
А в 1944 году Озангер изучил случай 2D и получил точное решение – правда, только в отсутствие внешнего поля. И нашёл, что есть некая критическая температура, при которой перестроение переходит разом! Это тут же привлекло внимание, потому что из экспериментов люди давно знали про точку Кюри – при температурах выше тело ведёт себя обычно, при температурах ниже – как ферромагнетик.
Увы, в 2D для случая, когда внешнее магнитное поле есть, или в 3D точных решений нет, только приближённые.

Приложения!
1) Красивые картинки отсюда https://habr.com/ru/post/506100/:



Как мы видим, чем больше температура, тем больше хаос. Напомню формулу из распределения Гиббса:

$$p(\text{состояния}) = \frac{1}{Z} * \exp\left(-\frac{E_{\text{состояния}}}{\theta}\right)$$

При $\theta = 0$ все вероятности равны 0, кроме той, у которой $E_{\text{состояния}} = 0$

А при $\theta \to \infty$ экспоненциальный множитель оказывается 1, и все вероятности оказываются равны между собой (и равны $\frac{1}{Z}$).

2) Код проги! Появится чуть позднее.